Bemerkungen zur Quadratrix des Hippias

Bernhard **Braunecker**

Geometrische Fragestellungen in der Antike

Zu den anspruchsvollsten intellektuellen Herausforderungen in der Antike gehörten die Versuche, all die Fälle in der Geometrie aufzuklären, die sich nicht mit den klassischen euklidischen Werkzeugen Zirkel und unmarkiertes Lineal lösen liessen. Man bezeichnet Beispiele, wo das gelingt wie beim regelmässigen Fünfeck als *euklidisch* konstruierbar, hingegen trifft das nicht zu beim regelmässigen Siebeneck.[1] Konstruktionen, die auf andere Hilfsmittel zurückgreifen mussten, wurden von den Griechen der klassischen Periode, aber auch bis ins 20. Jahrhundert als weniger zufriedenstellend betrachtet. Es gab deshalb auch immer Bemühungen eine approximative euklidische Lösung zu suchen, was auch gelang wenn man bereit war, zusätzlich zu Zirkel und Lineal neue Freiheitsgrade einzuführen.

Eine der illustren Fragestellungen war dabei die Quadratur des Kreises, also die Frage: kann man ein Quadrat so mit Zirkel und Lineal konstruieren, dass es flächengleich einem Kreis oder einem Kreissegment ist? Dass dies prinzipiell nur näherungsweise geht, wusste man allerdings schon damals, denn der Wert der Quadratfläche $F_Q = a^2$ kann eine ganze oder eine rationale Zahl sein, während der einer Kreisfläche $F_K = \pi a^2$ stets eine irrationale Zahl wegen des Faktors π ist, also eine Zahl mit unendlich vielen Nachkommastellen. Also muss man bei der Quadraturaufgabe auf jedem Fall neue Parameter spendieren, um trotz des mathematischen Widerspruchs eine praxisgerechte Annäherung zu bekommen.

Hippias von Elis

Nach Proklos hat sich *Hippias* um 420 v. Chr. an drei klassischen Problemen der antiken Mathematik versucht. Zur Lösung von zwei der drei Probleme, der Quadratur des Kreises und der Dreiteilung des Winkels, hat er mit dem Mathematiker *Nikomedes* die nach ihm benannte *Quadratrix des Hippias* erfunden, die wir im Folgenden skizzieren.[2]

---

[1] Eine Zahl heisst genau dann als mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn sie z. B. eine ganze Zahl, eine Dezimalzahl mit endlicher Anzahl Nachkommastellen oder die positive Wurzel aus einer dieser ist, also keine irrationale Zahl.

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratrix_des_Hippias

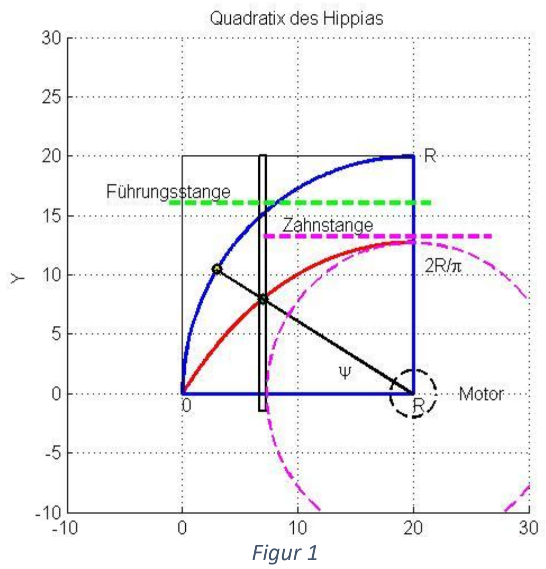
Quadratur des Kreises

Hippias Ansatz bestand aus zwei Phasen: zuerst definierte er, von einem Kreissegment ausgehend, eine spezielle Kurvenfunktion, die er mit Zirkel und Lineal konstruieren konnte und die ihm, allerdings nur asymptotisch, eine bestimmte Strecke lieferte, die er wiederum mit dem Zirkel abgreifen und in einer zweiten Phase mit ihr nach nunmehr bekannten euklidischen Regeln das flächengleiche Quadrat erstellen konnte.

Sein Vorgehen wird in Fig. 1 erläutert. In ein Quadrat der Kantenlänge R ist ein Viertelkreis eingezeichnet mit der Fläche $F_K = \pi/4\ R^2$. Gesucht ist die mit Zirkel und Lineal durchzuführende Konstruktion eines Quadrats gleicher Fläche, also mit der Kantenlänge $a = \sqrt{\pi}\ R/2$.

Der evolutionäre Ansatz Hippias war, dass er erkannte, dass bestimmte geometrische Fragestellungen nicht statisch gelöst werden können, sondern dass die Zeit als neuer Freiheitsgrad eingeführt werden muss. Anders als bei üblichen geometrischen Konstruktionen genügt es nicht, mit Zirkel und Lineal gerade oder krumme Linien *unabhängig* voneinander zu ziehen, sondern bestimmte Linienpaare müssen *gleichzeitig* gezogen werden. Man muss bestimmte Linienbewegungen synchronisieren und spricht dann von *kinematisch erzeugten* Kurven.

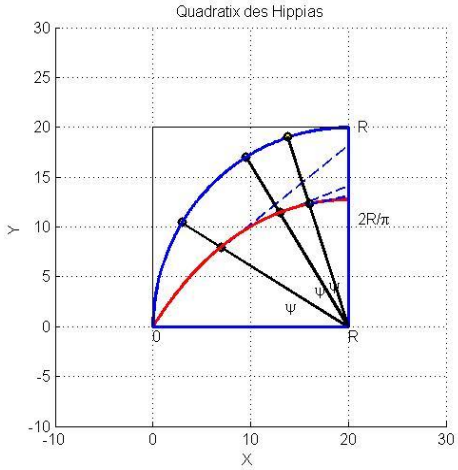
Die erste Aktion in Fig. 1 ist eine lineare Bewegung in x-Richtung einer vertikalen Schiene vom Startpunkt [0,0] nach [R,0]. Der Einfachheit halber soll die Strecke R in der Zeit T mit konstanter Geschwindigkeit $v = R/T$ gefahren werden gemäss $x(t) = x(0) + v\ t$ mit Startwert $x(0) = 0$. Die zweite Aktion ist eine Drehbewegung eines Stabs um den Punkt [R,0] mit Winkel $\psi(t) = \psi(0) - \omega\ t$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Randbedingungen sind $\psi(0) = \pi$ und $\psi(T) = \pi/2$ und somit gilt $\omega = (\pi/2)/T$ für die Drehung im Uhrzeigersinn.



Figur 1

Synchronisierung

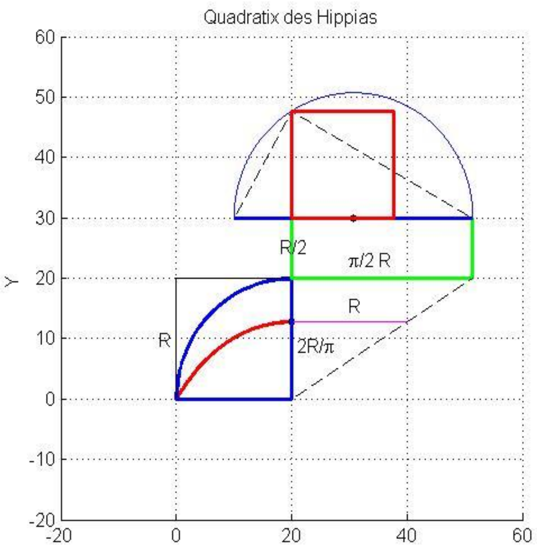
Beide Bewegungen werden zeitlich gekoppelt, indem der Radius der Drehbewegung λ zeitvariabel angepasst wird $\lambda(t) = (R - x(t)) / \cos(\psi(t))$. Das geschieht, indem man eine vertikale Schiene mit Schlitz mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt und gleichzeitig um den Punkt [R,0] einen Stab im Uhrzeigersinn mit ω rotiert. Der auf dem rotierenden Stab bewegliche und im Schlitz gefangene grüne Punkt bewegt sich dann entlang der roten Bahnkurve gemäss $\mathbf{r}_C = x(t)\,\mathbf{e}_x + \mu_x(t)\tan(\psi(t))\,\mathbf{e}_y$ mit $\mu_x(t) = R - x(t)$, wobei $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ die Einheitsvektoren in x respektive in y Richtung sind. Es ist ersichtlich, dass damit das Problem nicht gelöst ist, da für x = R der y-Wert als Produkt (0*∞) nicht direkt berechnet werden kann. Also musste Hippias mit seiner Funktion $\mathbf{r}_C(T)$ einen Grenzübergang t →T oder x → R vornehmen. Das geschieht am einfachsten, indem man bei Annäherung an den Endpunkt die Tangente berechnet oder mit dem Lineal konstruiert (blau gestrichelt in Fig.2) und ihren Schnittpunkt $\mathbf{r}_Q$ mit der Ordinate bei x = R bestimmt. Man legt dann die weiteren Zeitabstände so eng, bis die Variation von $\mathbf{r}_Q$ als hinreichend klein für die geplanten Zwecke akzeptiert werden kann. Der so erhaltene Wert $\mathbf{r}_Q = [R, 2R/\pi]$ ist nun für den zweiten Schritt graphisch mit dem Zirkel abgreifbar.



Figur 2

Quadratkonstruktion

Wie Fig. 3 zeigt, erlaubt die Kenntnis von $\mathbf{r}_Q$ die weiteren Schritte wieder mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Als erstes trägt man von $\mathbf{r}_Q$ in x-Richtung die in *magenta* gezeichnete Strecke der Länge R auf und verbindet ihren Endpunkt mit dem unteren Fusspunkt [R,0]. Die gestrichelte Linie schneidet die von [R,R] aus gezogene horizontale grüne Linie, die dann die Streckenlänge (π/2)R hat, wie man leicht mit Hilfe ähnlicher Dreiecke zeigen kann.



Figur 3

Das grüne Rechteck hat dann die Fläche $(\pi/2)\,R*R/2 = \pi/4\,R^2$, also die gesuchte Fläche des Viertelkreises. Mit Hilfe bekannter geometrischer Beziehungen wie die des Thales Kreises wird das grüne Rechteck in das flächengleiche rote Quadrat umgewandelt.

Mechanische Konstruktion

Man kann beide Bewegungen für $\mathbf{r}_C$ mechanisch synchronisieren, also nur mit einem Motor antreiben. Der Motor müsste also nicht nur während der Zeitspanne T den Stab um 90° im Uhrzeigersinn drehen, sondern auch ein Zahnrad mit Radius $r_Z = 2R/\pi$ (magenta gestrichelt in Fig. 1), welches die an einer Zahnstange befestigte Schlitzeinheit maximal um die Strecke R verschiebt. Dann wäre jedoch der Zahlenwert von r_Z oder von R eine irrationale Grösse, die mechanisch nur angenähert realisiert werden kann, und wir hätten wieder ein quadraturähnliches Problem, also keine sauber definierte euklidische Lösung.

Vergleich zu anderen Wissenschaften

Es ist bei wissenschaftlichen oder technischen Fragestellungen oft so, dass man innerhalb geschlossener Systeme mit zunehmenden Anforderungen an Machbarkeitsgrenzen stösst. Dann muss man zusätzliche Freiheitsgrade einführen, um weiter zu kommen. Wenn dies neue physikalische Ansätze, neue Messtechniken, oder neue mathematische Methoden zur Folge hat, dann ist ein wichtiger Evolutionsschritt getätigt, der dann wiederum neue Anwendungsmöglichkeiten eröffnen und auch zu einem tieferen Verständnis der Naturgesetze führen kann. Bei Hippias ist einerseits seine geniale Idee zu bewundern, die Synchronizität von Bewegungen einzuführen und andererseits sein Mut, den mathematischen Grenzübergang vorzunehmen, um eine streng genommen nicht lösbare mathematische Aufgabe mit entsprechenden Einschränkungen praxistauglich zu machen.