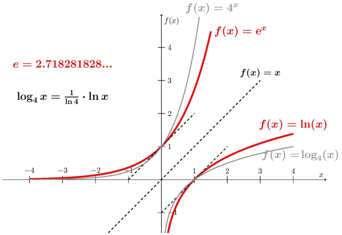
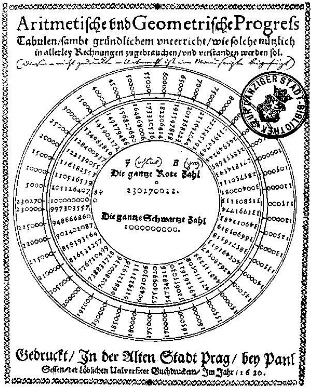
Über die frühe Geschichte der Logarithmen.

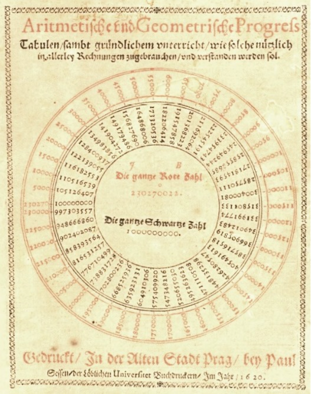
Detlef Gronau
Wien / Universität-Graz

UNIVERSITÄT GRAZ
UNIVERSITY OF GRAZ
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

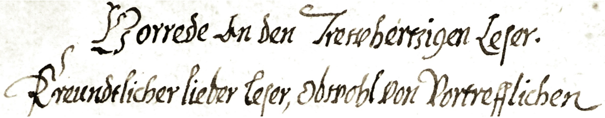


Bürgis "Progreß Tabulen sambt gründlichem unterricht/ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/ und verstanden werden sol."





Das Danziger und das Grazer Exemplar scheinen die einzigen der überhaupt wenigen erhaltenen Exemplare der Bürgischen Progreß Tabulen zu sein, denen der "gründliche Unterricht" und zwar in Handschrift beigefügt ist.


Vorrede An den Treuhertzigen Leser.
Freundtlicher lieber Leser, obwohl von Vortrefflichen

In seiner “*Vorrede an den Treuherzigen Leser*” schreibt Bürgi zunächst:

. . . obwohl von Vortrefflichen Mathematicis mancherleÿ Tabulen Sind erdichtet und Calculirt wordten, um die Schwierigkeiten deß Multiplizierenß, dividierenß, und Radices Extrahierenß aufzuheben, ſo ſein doch dieſelbigen allzeit nur particular geweſen als das Multiplizieren und dividieren Ihre eigene Tabulen [. . .] erfordert hat, das Extrahieren der Radicum quadratarum ſeine quadat Tabulen, die Cubiſche Extraction ihre Cubic Tabulen und alſo fort eine jedere quantitat ihre beſondere Tabulen vonnöten hatt, villheidt aber der Tabulen nicht allein verdrießlich ſondern auch mühſelig und beſchwerlich ſeindt, Derowegen Ich zu aller Zeit geſucht und gearbeitet habe General Tabulen zu erfinden, mit welcher man die vorgenandten Sachen alle verrichten möchte.

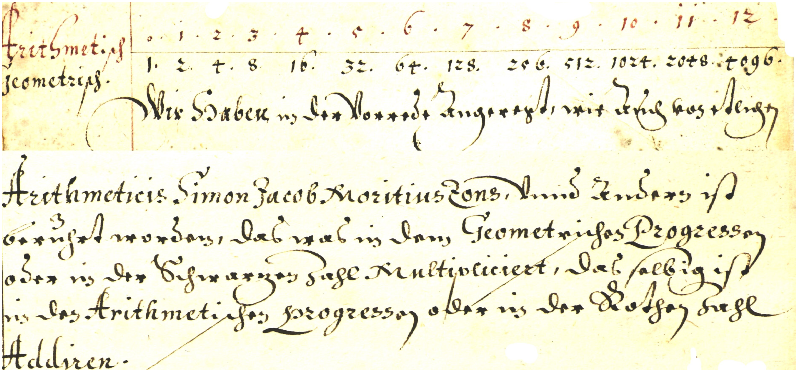
Betrachtendt derowegen die Aigenſchafft und Correſpondenz der Progreſſen als der Arithmetiſchen mit der Geometriſchen, das was in der iſt Multiplizieren iſt in jener nur Addieren, und was iſt in der dividieren, in Jehner Subtrahieren, und was in der iſt Radicem quadratam Extrahieren, in Jener iſt nur halbieren, Radicem Cubicam Extrahieren, nur in 3 dividieren, Radicem Zenſi in 4 dividieren, Surſolidam in 5. Und alſo fort in Andern quantitaten, ſo habe Ich nichts Nützlichres erachtet, dan diſe Tabulen [. . .] Und ob wohle ich mit dieſen Tabulen vor etlichen Jahren umbgangen bin, ſo hatt doch mein beruff von der Edition derſelben mich enthalten, wolle derowegen der gutherzige Leſer diſes ihm alſo gefallen laſſen, und die Tabulen mit volgender underweiſung des Verſtands durch und mit etlichen Exemplen erklehrt, günſtig annehmen.

wie hernach folgt.

Kurtzer Bericht der progress Tabulen

wie die selbige nützlich in allerleÿ Rechnung Zugebrauchen.

Zu dießen Tabulen findet man zwaÿerlaÿ zahlen Eine mit roten Charactere, welche wie einem jeden Leichtlich zu sehen nichts andres dann ein Arithmetischer progreß, die Ander abe[r] mit schwarzen, dan ein Geometrischer progress ist . . .
Wir haben in der Vorrede angeregt, wie auch von etlichen Arithmeticis Simon Jacob Moritius Zons, und andern ist berührt worden, das was in den Geometrischen Progressen oder in der Schwarzen Zahl Multipliziert, das selbig ist in den Arithmetischen progressen oder in der Rothen Zahl Addiren.



Arithmetica	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
geometria	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Wir haben in der Vorrede angeregt, wie das bey etlichen Arithmeticis Simon Jacob, Moritius Zons, Und Andern ist gebraucht worden, das was in den Geometrischen Progressen oder in der Schwarzen Zahl Multipliciert, das selbig ist in der Arithmetischen progress oder in der Rothen Zahl Addiren.

Hier gibt Bürgi seine Ideengeber an:

Simon Jacob, ***Moritius Zons*** und andere.

103.

Ein New vnd Wol-
gegründt Rechenbuch/auff den Linien vñ Ziffern/
sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen/neben der
extraction Radicum, vñ von den Proportionen/mit vilen lustigen Fragen vñ
Auffgaben/rc. ¶ Deßgleichen ein vollkomner Bericht der Regel Falsi/mit neuwen Inventio-
nibus/Demonstrationibus/ vnd vortheilen/so biß anher für vnmüglich geschetzt/gebessert/der-
gleichen noch nie an tag kommen. ¶ Vnd dann von der Geometria/ wie man mancherley Fel-
der vnd ebne/auch allerley Corpora/Regularia vnd Irregularia/messen/Aream finden vñ rech-
nen sol. Alles durch Simon Jacob von Coburg/Bürger vnd Rechenmeister zu
Franckfurt am Main/mit fleiß zusammen getragen/vnd jetzt
erstmals getruckt.

Mit Röm. Keyser. Mt. Gnad vnd Freiheit nicht nachzutrucken.

Getruckt zu Franckfurt am Mayn/1565.

Simon Jacob, Ein New und Wolgegründt Rechenbuch auff den Linien uñ Ziffern . . . Gedruckt zu Frankfurt am Mayn 1565

Ein new
Wolgegründtes Kunst- vnd Ar-
tigs Rechenbuch auff der Ziffer/von vie-
len nützlichen Kauffmans Regulen/in allen hand-
tierungen/Gewerben/Kauffschlägen/vnd was dem son-
sten anhängig sein mag/fast dienst vñ gebreuchlich/auß bewer-
lichem grund vnd rechtem Fundament in Frag vnd
Antworts weiß/jetzo zum dritten mal
gemeiner Jungent in Truck
gegeben.

Sampt einem angehengtem gründli-
chen vnderricht/wie man bey einer jeden Eych auß
bewehrtem grund ein Visirstab verfertigen vnd be
zeichnen soll/damit aller Fässer inhalt
abgenomen wird.

Alles durch
Mauritium Zons/Bürger vnd Rechenmeister
in Cölln Teutscher vnd Frantzosischer
Sprachen.

Gedruckt zu Cölln/bey Matthis Smitz/vnter
der Hagt/Anno 1616.

Mauritius Zons, Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch auff der Ziffer Gedruckt zu Cölln bey Matthis Smitz Anno 1616

SIMON JACOB, 1510? – 1564

„Ein New und Wolgegründt Rechenbuch auff den Linien wie Ziffern ſamt der Welſchen Practic“, Frankfurt am Main 1565, ist ein Rechenbuch, das von seinem Bruder *Pangratz Jacob von Coburg* posthum herausgegeben wurde. Auch hier findet man die Begriffe *arithmetische Progression* und *geometrische Progression*.
Er führt auch auf (Seite 14 verso) ein Beispiel an:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.

also die Folge $3 \cdot 2^n$, $n = 0, \ldots, 8$. Er erklärt auch (auf Seite 15) die Beziehung zwischen arithmetischer und geometrischer Progression:
„So merck nun / was in Geometrica progreßione iſt Multiplicirn / das iſt in Arithmetica progreßione Addiern / und was dort iſt Dividiern / das iſt hie Subtrahiern / und was dort mit ſich iſt Multiplicirn / iſt hie ſchlecht Multiplicirn / Letztlich was dort iſt Radicem extrahiern / das iſt hie ſchlechts Dividiern mit der zal die der Radix in Ordnung zeigt / ... “

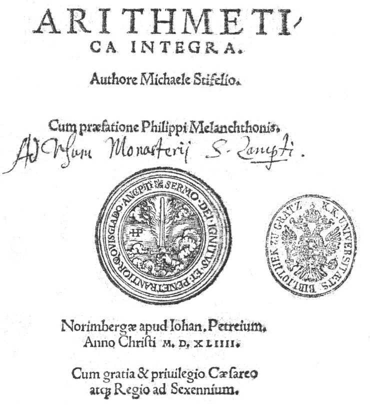
MAURITIUS ZONS

„Ein new Wolgegründtes Kunst- und Artig Rechenbuch auff der Ziffer / von vielen nützlichen Kauffmans Regulen / ... / jetzo zum dritten mal gemeiner Jungent in Truck gegeben.
Sampt einem angehengten gründlichen underricht / wie man bey einer jeden Eych auß bewehrtem grund ein Visierstab verfertgen und bezeichnen soll / damit aller Väßer inhalt abgenommen wird.
Alles durch
Mauritius Zons / Bürger und Rechenmeister
in Cölln Teutscher und Französischer Sprachen.
Gedruckt zu Cölln / bey Matthis Smitz / unter der Zagt / Anno 1616."

Auch hier werden Progressionen eingeführt:
„Wie vielerley sind Progressiones = Zweyerley / Nemlich Arithmetica und Geometrica" . . . und es werden die Eigenschaften dieser Progressionen beschrieben.

Man kann aber noch weiter zurück gehen:

Michael Stifel, $\sim$ 1487 – 1567


ARITHMETICA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.

Cum præfatione Philippi Melanchthonis.

Ad Usum Monasterii S. Lamperti.

Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo atq; Regio ad Sexennium.


wiener staatsoper

Dienstag, 10. Februar 2009

35. Aufführung in dieser Inszenierung

Stiffelio

Dramma lirico in drei Akten
von Francesco Maria Piave

Musik von Giuseppe Verdi

Dirigent	Michael Halász
Inszenierung	Elijah Moshinsky
Bühnenbild	Michael Yeargan
Kostüme	Peter J. Hall
Lichtregie	Paul Pyant
Chorleitung	Thomas Lang

Stiffelio	José Cura
Lina	Hui He
Stankar	Mark Rucker
Raffaele	Gergely Németi
Jorg	Alexandru Moisiuc
Federico	Benedikt Kobel
Dorotea	Elisabeta Marin

Orchester der Wiener Staatsoper
Chor der Wiener Staatsoper

Bühnenorchester der Wiener Staatsoper
Eleven der Ballettschule der Wiener Staatsoper

Aufgrund anhaltender Erkrankung kann
Anthony Michaels-Moore die Partie des Stankar nur spielen.

In seiner Arithmetica integra, Nürnberg 1544, Seite 249 verso, führt Michael Stifel Reihen von Potenzen von 2 an, sogar auch eine mit negativen Exponenten:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.

Qualiacunq; facit progreſſio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progreſſio Arithmetica addendo & ſub trahendo.

Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8, Sic −3 additum ad 6, facit 3.

MICHAEL STIFEL; Arithmetica integra:

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus nu-
merorum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis oculis abeã.
Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in
campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repeten-
dum uidetur.

"Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen". Und weiter: *"Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen Reihe, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich* [d.h. Potenzierung] *bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen"*

Der Einfluss von Michael Stifel

Dass Michael Stifel Einfluss auf Simon Jacob und Mauritius Zons hatte, kann man vermuten, auf Bürgi allerdings höchstens nur indirekt. Dagegen wurde laut E. Hofmann John Napier sehr wohl von Stifels *“arithmetica”* angeregt.


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART Bibliopolæ, CIϽ. DC. XIV.

John Napier (1550 – 1617), Baron von Merchiston, hat bekanntlich unabhängig von Bürgi Logarithmen-ähnliche Tabellen erstellt: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometria etc. Edinburgh 1614.*

Die Rara-Abteilung der Universitäts-Bibliothek Graz ist im Besitz des Nachlasses von Paulus Guldin, geb. 12.6.1577 in Mels im heutigen Kanton St. Gallen, † 3.11.1643 in Graz. Hier findet man neben den Bürgischen Tabulen (wiederentdeckt 1985 durch Dr. Ernst Seidel) auch die Logarithmentafeln von Napier und Briggs, die Werke von Simon Jacob und Mauritius Zons sowie auch Keplers *'Tabulae Rudolphinae.'*

Die *'arithmetica integra'* von Stifel ist erst später durch die josephinische Klösterreform nach Graz gekommen.

Die Logarithmen von Bürgi und Napier

John Napier (Mirifici Logarithmorum canonis descriptio, Edinburgi 1614.) und Jost Bürgi, (Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen, Prag 1620) werden allgemein als die "Entdecker der Logarithmen" anerkannt, wobei beiden zugestanden wird, dass sie ihre Entdeckung unabhängig voneinander gemacht haben. Beide Tafeln beruhen auf dem selben mathematischen Prinzip, nämlich einer Tabelle bestehend aus zwei Reihen, einer *arithmetischen Reihe:*

$$x_n = n \cdot s, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

und einer *geometrischen Reihe:*

$$y_n = z \cdot q^n, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

wobei s, z und q jeweils fest gewählte Konstanten sind.

$\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma \Longrightarrow$ "Logarithmus"

Bürgi nimmt in seiner Tabelle die Konstanten

$$s = 10,\ z = 10^8 \ \text{ und } \ q = 1 + 10^{-4},$$

Napier wählt

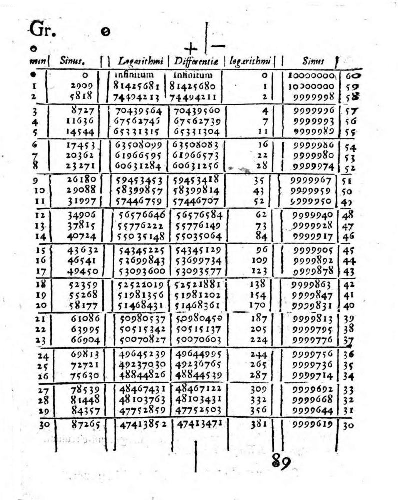
$$s = 1 + 0.5 \cdot 10,\ z = 10^7 \ \text{ und } \ q = 1 - 10^{-7}.$$

Beide nennen auch ihre Reihen "arithmetische" und "geometrische" Progressionen.
Napier nennt die Zahl x_n den "Logarithmus" von y_n, wohl von

$$\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma.$$

Bürgi nennt x_n die "rote Zahl" von y_n. Bei ihm kommt das Wort Logarithmus nicht vor.

Die Tafeln von Napier und Bürgi



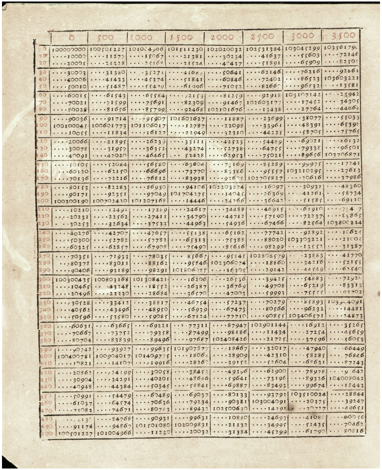
Gr. 0

0

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

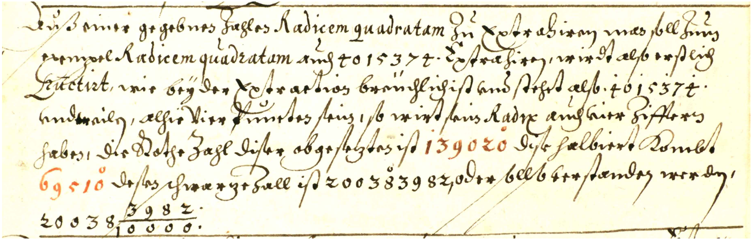
89

John Napier Mirifici Logarithmorum, 1614



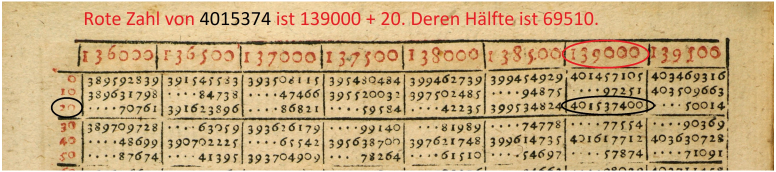
Jost Bürgi, Progresstabulen, 1620

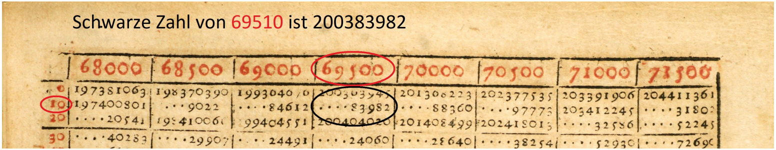
Ein Beispiel aus Bürgis Progresstabulen



Aus einer gegebenen Zahlen Radicem quadratam zu extrahiren. Man soll zum Exempel Radicem quadratam aus 4015374 Extrahiren, wirdt also erstlich punctirt wie beÿ der extraction bräuchlich ist und steht also $\dot{4}0\dot{1}5\dot{3}7\dot{4}$ *und weil alhir vier Punkten seind, so wirdt sein Radix auch vier Ziffern haben, die rothe Zahl diser obgeführten ist* *139020* *dise halbiret kombt* *69510* *dessen Schwarze Zall ist* $2003\overset{\text{o}}{8}3982$ *oder soll verstanden werden* $20038\frac{3982}{1000}$.

Tabellensuche



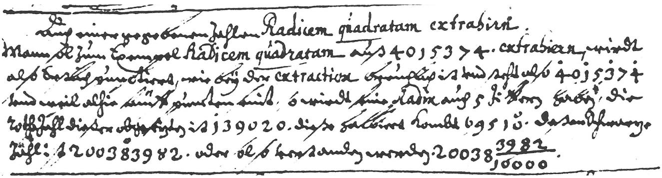


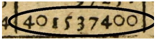
Mein Taschenrechner liefert $\sqrt{4015374} = 2003.8398$. Das Ergebnis bei Bürgi ist also bis auf die Dezimalstellen richtig. Allerdings sind mit bei Bürgi $2003\overset{\circ}{8}3982 = 20038\frac{3982}{1000}$ eigenartigerweise 5 statt der richtigen 4 Stellen des Radix angegeben.

Danziger Exemplar

Ein Vergleich mit dem Danziger Exemplar ([Gieswald 1856], S. 327) ist dabei interessant:

Aus einer gegebenen Zahlen Radicem quadratam extrahiern. Man sol zum Exempel Radicem quadratam auß 4015374 extrahiern, wird also erstlich punctiert wie bei der extraction breuchlich ist und steht also $\dot{4}0\dot{1}5\dot{3}7\dot{4}$ *und weil alhier fünf punkten seindt, so wirdt sein Radix auch 5 Ziffern haben, die rothe Zahl dieser obgeführten ist 139020 dieße halbirt kombt 69510 dessen Schwarze Zahl ist* $2003\overset{\circ}{8}3982$ *oder soll verstanden werden* $20038\frac{3982}{1000}$.

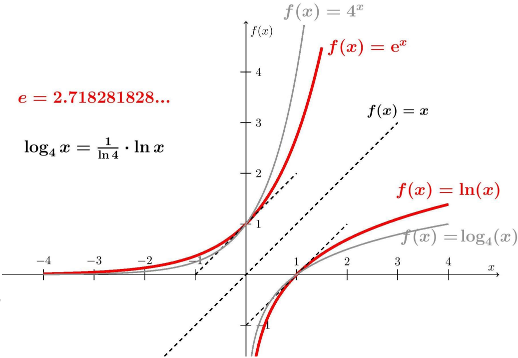


Die Rechnung hier wäre richtig, wenn man die Wurzel aus 401537400 wie in der Tabelle vorhanden 

berechnen wollte.

Durch die von Bürgi und Napier tabellierten Zahlenreihen werden Funktionen (Bürgi schreibt ‘Correspondenzen’) definiert.

Um diese zu untersuchen, verwendet man am besten die Funktion des **Logarithmus, eingeführt von** LEONHARD EULER **(1707 – 1783) in seiner** *Introductio in Analysis Infinitorum, 1748*: **Für eine reelle Zahl** $a > 0$ **ist die Funktion** $f(x) := a^x$ **injektiv und besitzt eine Umkehrfunktion definiert für positive reelle Zahlen.**

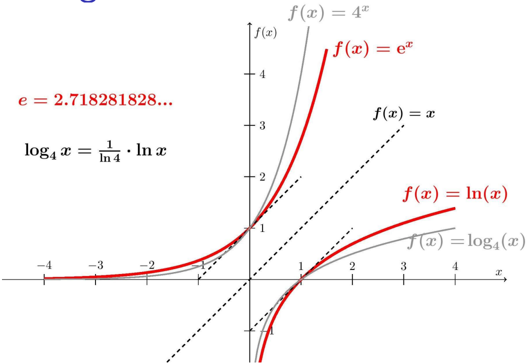


Die Umkehrfunktion f^{-1} von f ist definiert durch:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = a^x$ heißt Logarithmus zur Basis a, in Zeichen: $\log_a$, also $x = \log_a y$ genau dann wenn $y = a^x$.

Der natürliche Logarithmus



Die Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828...$ ist die *"Eulersche Zahl"*. Die Umkehrfunktion der sog. *"Exponentialfunktion" e^x* wird *"natürlicher Logarithmus"* genannt und mit ln bezeichnet, also

$$\ln := \log_e.$$

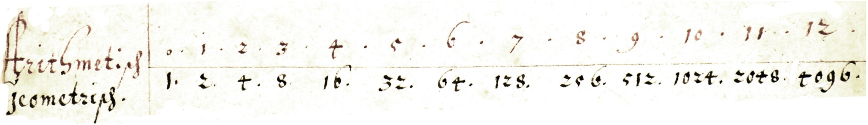
Die Zahl e ist von Euler so bestimmt worden, dass die Tangente an den Graph von ln im Punkt ln 1 den Anstieg 1 hat.

Beispiele

Hier ein Zahlen-Beispiel:

$$4^{1.5} = 4^{3/2} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 8 \quad \text{also} \quad \log_4(8) = 1.5.$$

In Bürgis "Kurzem Bericht" haben wir die folgende Tabelle gesehen:



Aritsmetica	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Geometrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Diese Tabelle ist nichts anderes als eine Logarithmentafel des 2-er Logarithmus'.

$$\log_2(1) = 0, \ \log_2(2) = 1, \ \log_2(4) = 2, \ \log_2(8) = 3, \ \ldots$$

Es gilt weiters $\log_a(1) = 0$ für alle (relle) Zahlen a , denn $a^0 = 1$.

Die logarithmische Funktionalgleichung

Es gilt somit:
$$x = \log_a y \text{ genau dann wenn } y = a^x.$$

Weiters, mit $y := a^x$ und $w := a^u$, also $x = \log_a y$ und $u = \log_a w$ folgt aus
$$a^x \cdot a^u = a^{x+u}$$
die sogenannte "logarithmische Funktionalgleichung"

$$\boxed{\log_a(y \cdot w) = \log_a y + \log_a w}$$

Aus dieser folgt leicht:
$\log_a(y \cdot y) = 2 \cdot \log_a y$, $\log_a(y \cdot y \cdot y) = 3 \cdot \log_a y$, . . . usw.

also für eine natürliche Zahl n:

$\log_a y^n = n \cdot \log_a y$ Potenzieren durch Multiplizieren.

$\log_a \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \cdot \log_a y$ Wurzelziehen durch Dividieren.

Die Funktionen

Die Funktion L die durch die Beziehung zwischen der arithmetischen Reihe

$$x_n = n \cdot s$$

und der geometrischen Reihe

$$y_n = z \cdot q^n$$

festgelegt wird, ist definiert durch $L(y_n) := x_n$, also

$$L\left(z \cdot q^n\right) = n \cdot s$$

Setzt man nun $y := z \cdot q^n$ und löst n in Abhängigkeit von y auf, dann verwenden wir den *natürlichen Logarithmus* ln und erhalten so $n = \ln\left(y/z\right) / \ln q$, also

$$L(y) = \frac{s \cdot \ln\left(\frac{y}{z}\right)}{\ln q}. \tag{1}$$

Napiers und Bürgis “Logarithmen”

Setzt man nun in (1) die von Bürgi gewählten Konstanten $s = 10$, $z = 10^8$ und $q = 1 + 10^{-4}$, ein, erhält man für die von Bürgi tabellierte Funktion, nennen wir sie die “Bürgischen Logarithmen” L_B, mit:

$$L_B(y) = 10^5 \cdot \left(\ln\left((1+10^{-4})^{10000}\right)\right)^{-1} \cdot \ln\frac{y}{10^8}.$$

Hier ist $(1 + 10^{-4})^{10000} = 2.71814595$ ist ungefähr gleich der Eulerschen Zahl $e = 2.7182818285$ somit $\ln(1 + 10^{-4})^{10000} \approx 1$. Daher tabellieren Bürgis Progreß Tabulen näherungsweise den natürlichen Logarithmus:

$$\boxed{L_B(y) \approx 10^5 \cdot \ln\left(\tfrac{y}{10^8}\right)}.$$

Analog erhält man für die “Napierschen Logarithmen”

$$L_N(y) = 10^7 \cdot \left(1 + 0.5 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left[\ln\left((1-10^{-7})^{10^7}\right)\right]^{-1} \cdot \ln\frac{y}{10^7},$$

also näherungsweise:

$$\boxed{L_N \approx 10^7 \cdot \ln\frac{10^7}{y}}.$$

Johannes Kepler (1571 – 1630); die Rudolfinischen Tafeln (Tabulae Rudolphinae)

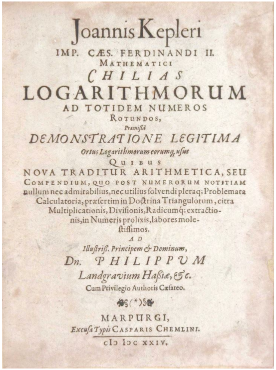
1601 erhielten Tycho Brahe (1546 – 1601) und Kepler in einer Audienz bei Kaiser Rudolf II. den Auftrag, neue Planetentafeln herzustellen, die sogenannten *"Rudolfinische Tafeln"*. Sie wurden von Kepler alleine fertggestellt und erst 1627 gedruckt.

Kepler und die Logarithmen – Chilias Logarithmorum

Kepler wollte zunächst die prostaphairetische Methode in den "Tabulae Rudolphinae" verwenden. Er erfuhr dann erst im Frühjahr 1617 von Napiers neuen Rechenmethode. Kepler entschloss sich daher aus Mangel an Informationen über Napiers Logarithmen, eine eigene theoretische Grundlegung dieser *Logarithmen* zu verfassen:

Johannes Kepler
kaiserlicher Mathematiker des Ferdinand II
Chilias logarithmorum
Marburg 1624.

Gewidmet dem Landgrafen Philipp[1] von Hessen. In der Widmung bedankt er sich beim Landgraf Philipp für die dreißig Geldstücke (*"triginta expensis"*) und verspricht dafür dreißig Propositionen zu geben.


Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II.
MATHEMATICI
CHILIAS
LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS
ROTUNDOS,
Præmissâ
DEMONSTRATIONE LEGITIMA
Ortus Logarithmorum eorumq; usus
QUIBUS
NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicumq; extractio-
nis, in Numeris prolixis, labores mole-
stissimos.
AD
Illustriß. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Hassiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæsareo.
MARPURGI,
Excusa Typis CASPARIS CHEMLINI.
CIↃ IↃC XXIV.

[1] Philipp III., 1581 - 1643, Landgraf von Hessen-Butzbach.

Der Logarithmus von Kepler

Kepler führt in den ‘Chilias’ eine Funktion, genannt *Mensura* (Maß) für alle positiven reellen Zahlen ein. Wir beschreiben dies hier in zeitgemäßer Notation. Dieses Maß M erfülle die *logarithmische Funktionalgleichung*

$$M(x \cdot y) = M(x) + M(y).$$

Kepler erhält mit $\quad M(x^2) = 2 \cdot M(x) \quad$ die Formel

$$M(x) = 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) \cdot \frac{M(x^{1/2^n}) - M(1)}{(x^{1/2^n} - 1)}.$$

Es gilt $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n \to \infty$, und es folgt durch Grenzübergang $\lim_{n\to\infty} \frac{M(x^{1/2^n}) - M(1)}{(x^{1/2^n} - 1)} = M'(1)$ und wie wir seit Cauchy[2] wissen:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot (x^{1/2^n} - 1) = \ln x.$$

[2] Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857

Somit gilt für das Maß $M(x) = M'(1) \cdot \ln x$. Kepler betont, dass er die Konstante $M'(1)$ beliebig wählen kann, setzt einmal dafür 1000 und später dafür 10^7. Dann definiert er seinen (Keplers) *Logarithmus* mit

$$L_K(y) = M\left(\frac{10^7}{y}\right) = 10^7 \cdot \ln \frac{10^7}{y},$$

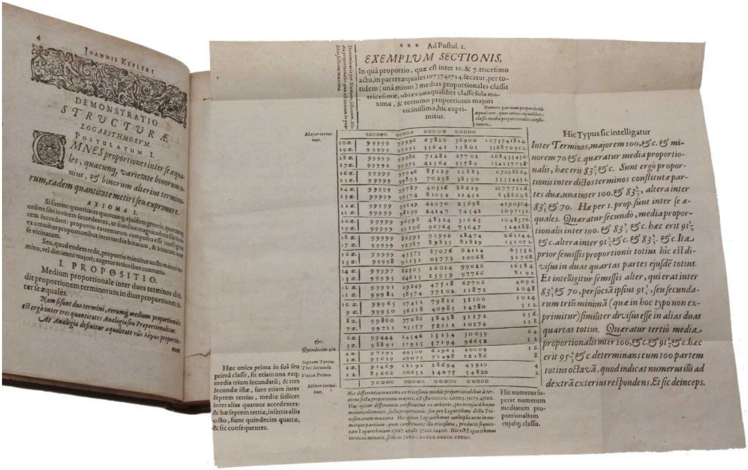
also (fast) gleich dem Napierschen Logarithmus. Die eigentliche Erfindung Keplers ist aber sein Maß M

$$M(x) = M'(1) \cdot \ln(x),$$

das also bis auf die Konstante 10^7gleich dem natürlichen Logarithmus ist.

Exemplum Sectionis

Kepler berechnet das Maß von $\frac{10}{7}$ mit 35667 49481 37222 14400 was mit dem Logarithmus $\ln\left(\frac{10}{7}\right) = 0.35667\,49439\,38732\,37891$ in immerhin 8 Stellen übereinstimmt.



“homo cunctator et secretorumsuorum custos”

Kepler entschied sich dann, seine den Neperschen nachempfundenen Logarithmen in die Rudolfinischen Tafeln einzufügen obwohl er inzwischen auch schon von den Briggschen dekadischen Logarithmen Kenntnis erhielt. Im Kapitel III der Tafeln erwähnt er dann neben Napier und Briggs auch Bürgi (Justus Byrgius) und seine Logarithmen: *“Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Napierschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben.”* Kepler fährt dann aber fort: *“Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen.”* Sonst nimmt Kepler in den Rudolfinischen Tafeln keinen weiteren Bezug auf Bürgis Logarithmen und erwähnt auch nicht dessen Progress Tabulen.

Die weitere Entwicklung der Logarithmentafeln

Henry Briggs (1561 – 1630), Professor für Geometrie in London und Oxford, publizierte 1617 Tabellen mit dem Logarithmus zur Basis 10 (*Briggscher Logarithmus*). Sie hatten den Vorteil, dass man die Umrechnung der Dezimalstellen und inbesondere die Reduktion der Zahlen auf den Tabellenbereich leichter durchführen kann. Kepler erhielt um 1623 von seinem Freund Gunter[3] ein Buch über diese dekadischen Logarithmen. Doch schließlich entschied sich Kepler, doch auf die dekadischen Logarithmen zu verzichten. So schreibt dann Briggs an Kepler: *"Eurem soeben erschienenen Buch über die Logarithmen anerkenne ich den Scharfsinn und lobe den Fleiß. Hättet Ihr jedoch auf den Erfinder Merchiston gehört und wäret Ihr mir gefolgt, dann hättet Ihr meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen."*

[3] Edmund Gunter, 1581 - 1626, englischer Mathematiker und Astronom.

Die auf Grundlage der Neperschen Logarithmen berechneten Rudolfinischen Tafeln mit ihrer weitreichenden Bedeutung in der Astronomie und der Seefahrt bewirkten ihrerseits, dass die ansonsten durch die dekadischen Logarithmen sehr schnell veralteten Napierschen bzw. Keplerschen Logarithmen noch unverhältnismäßig lange weiterlebten. Sie wurden 1631 von Keplers Schwiegersohn JAKOB BARTSCH neu herausgegeben. Obwohl diese Ausgabe viele Fehler enthielt, wurde sie mit Rücksicht auf die Benützbarkeit der Rudolfinischen Tafeln noch 1700 wieder aufgelegt.

Die weitere Entwicklung der Logarithmen

Ab 1636 gelang Pierre Fermat (1601 – 1665) die Quadratur der höheren Hyperbeln und Parabeln der Form

$$y = ax^m,\ y = \frac{a}{x^m} \ \text{ und } \ y^n = ax^m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Er hat, in unserer Notation, die Formel

$$\int_0^x y^k dy = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

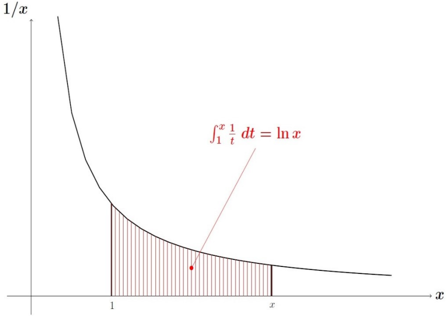
wobei k eine beliebige ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann, entdeckt. Diese Formel versagt jedoch bei $k = -1$. Für diesen Fall fanden 1630 (veröffentlicht 1647) die Jesuitenpater Gregorius a Santo Vincentio (1584 – 1669) und Alfonso Anton de Sarasa (1618 – 1667) eine Lösung: *Wenn die Abszissen einer Hyperbel in geometrischer Progression wachsen, dann bilden die Flächen eine arithmetische Progression.* Das führte auf die Logarithmen: *"Unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum"* (Daher können diese Flächen den Platz gegebener Logarithmen ausfüllen).

Hyperbolischer Logarithmus

Damit haben wir den sogenannten *“hyperbolischen Logarithmus”*

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt,$$

nach Euler identisch mit dem *natürlichen Logarithmus*.



Logarithmische Reihe

Isaac Newton (1643 – 1727) und auch Nicolaus Mercator (eigentlich Kauffmann, 1620 – 1687) führten die sogenannte “logarithmische Reihe” ein:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\ .$$

Die Cauchyschen Funktionalgleichungen

Die logarithmische Funktionalgleichung $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ wurde von Augustin Louis Cauchy, (1789 – 1857) in Cours d'analyse de L'École Polytechnique, Vol. 1, Analyse algébrique V, Paris 1821, systematisch behandelt. Sie ist eine der vier sogenannten *Cauchyschen Funktionalgleichungen*:

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x)+f(y) & \qquad f(x+y) &= f(x)\cdot f(y)\\
{\color{red}f(x\cdot y)} &{\color{red}=} {\color{red}f(x)+f(y)} & \qquad f(x\cdot y) &= f(x)\cdot f(y)
\end{aligned}
$$

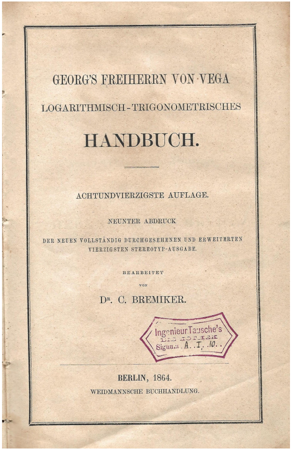
die weiterhin in der Theorie der Funktionalgleichungen ausführlichst und in allen möglichen Verallgemeinerungen untersucht wurden. Der Keplersche Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x),$$

differenzierbar in $x = 1$, ist erst im 20. Jahrhundert von verschiedenen Autoren (z.B. Marek Kuczma) wiederentdeckt worden, wobei diese sicher nicht vom historischen Vorgänger Kepler gewusst haben.

Weitere Logarithmentafeln

An Logarithmentafeln möchte ich noch (aus Patriotismus) diejenigen von Georg Freiherr von Vega (1756 – 1802), Major und Professor der Mathematik beim Kaiserl. königl. Bombardierkorps erwähnen: *"Logarithmische, trigonometrische,und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln"* (1783), *"Logarithmisch trigonometrisches Handbuch"* (1793) und *"Thesaurus logarithmorum completus"*, 1794.



GEORG'S FREIHERRN VON VEGA

LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHES

HANDBUCH.

ACHTUNDVIERZIGSTE AUFLAGE.

NEUNTER ABDRUCK

DER NEUEN VOLLSTÄNDIG DURCHGESEHENEN UND ERWEITERTEN VIERZIGSTEN STEREOTYP-AUSGABE.

BEARBEITET

VON

Dr. C. BREMIKER.

BERLIN, 1864.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

Schul- Logarithmentafel

Jelínek-Herold

Fünfstellige Tafeln

für den

Mathematik-Unterricht

Potenzen, Logarithmen, Kreis- und Hyperbelfunktionen, Zinseszins, Lebensversicherung usw.

32. Auflage

besorgt von

Dr. Anton Hossner

unter Mitarbeit von

Dr. Eugen Waage

Erweiterter Abdruck der mit dem Erlaß des Bundesministeriums für Unterricht vom 3. Jänner 1946, Z. 9873-K/1945, für den Unterrichtsgebrauch an Mittelschulen und an technischen und gewerblichen Lehranstalten zugelassenen 26. Auflage

Tafeln für den Unterrichtsgebrauch an Mittelschulen und an technisch gewerblichen Lehranstalten zugelassen. 26. Aufl. Wien 1957.

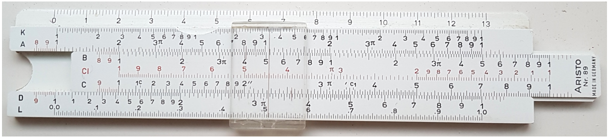
Ein Beispiel:

Num	1.13×1.27	$=$	1.4351
$\log_{10}$	$0.05308 + 0.10380$	$=$	0.15688
Num			$\underline{\underline{1.4351}}$

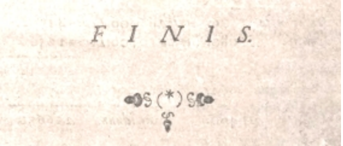
n	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	43·5
*101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	43
102		860	903	945	988	'030	'072	'115	'157	'199	'242	42·5
*103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	42
104		703	745	787	828	870	912	953	995	'036	'078	41·5
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	41
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	41
*107		938	979	'019	'060	'100	'141	'181	'222	'262	'302	40·5
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	40
*109		743	782	822	862	902	941	981	'021	'060	'100	40
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	39·5
111		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	39
112		922	961	999	'038	'077	'115	'154	'192	'231	'269	38·5
*113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	38
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	'032	38
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	37·5
116		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	37
117		819	856	893	930	967	'004	'041	'078	'115	'151	37
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	36·5
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	36
120		918	954	990	'027	'063	'099	'135	'171	'207	'243	36
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	36
122		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	35·5
123		991	'026	'061	'096	'132	'167	'202	'237	'272	'307	35
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	35
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	'003	34·5
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	34
*127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	34
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	'025	34
129	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	33·5
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	33
*131		727	760	793	826	860	893	926	959	992	'024	33
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	33
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	33
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	'001	32·5
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	32
136		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	32
*137		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	31·5
138		988	'019	'051	'082	'114	'145	'176	'208	'239	'270	31
*139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	31
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	31
141		922	953	983	'014	'045	'076	'106	'137	'168	'198	31
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	30·5
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	30
144		836	866	897	927	957	987	'017	'047	'077	'107	30
145	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	30
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	30
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	29·5
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	29
*149		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	29
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29
n	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

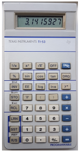
Logarithmentabellen

Logarithmentabellen spielen heute wohl kaum eine Rolle mehr, ihre historische Bedeutung ist aber immens, halfen sie doch mit bei der Entwicklung der Rechenschieber



und vor allem bei der Geburt der Logarithmusfunktionen. Diese sind unverzichtbar in der **reinen und angewandten Mathematik**, in **Physik, Informatik, Statistik, Wirtschaftswissenschaften** u.a.





F I N I S.